

ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ДИВЕРТИСМЕНТ.

Макаренко Н.Г.
ГАО РАН
ng-makar@mail.ru

<p><i>В начале было Слово,.....(Ин. 1:1)</i> <i>In the Beginning Was ... Gaussian Topology?!</i> (Robert Adler)</p>
--

Возьмем шарик радиуса ε и прокатим его по границе прямоугольника, закрашивая след. То, что получится в итоге, называют ε -парралельным телом. В 1864 году швейцарский математик *Якоб Штейнер* показал, что площадь такого тела является точным полиномом 2-й степени по ε . Коэффициенты разложения называют функционалами Минковского; это площадь, периметр и характеристика Эйлера. *Гуго Хадвигер*, швейцарский математик, показал в 1957 году, что эти функционалы образуют базис в кольце выпуклых множеств. Так появилась математическая морфология, формализованная в 1970-х годах французскими математиками *Жоржем Серра* и *Жоржем Матероном*. Она с успехом используется в космологии, физике и стереологии, *Стефан Райс*, американский ученый из *Bell Labs* в 1944-45г. опубликовал две статьи о шумах. Они легли в основу новой науки, *геометрии случайных полей*. *Райс* рассмотрел пересечение графика случайной функции с горизонтальной прямой и получил две важных статистики: число выбросов функции выше уровня на единицу длины и время пребывания графика функции выше уровня. Интересно, что еще в 1925 г. польский и советский математик *Стефан Банах* изучил свойства пересечений (индикатрисы) произвольной функции горизонтально и получил замечательную формулу. Она показывает, что интеграл по уровням сечения равен ее полной вариации! Прямое обобщение этого результата на 2D – *формула ко-площади*. Она позволяет оценить полную вариацию случайного поля суммой длин его изолиний. Усреднение этой формулы приводит к знаменитой *формуле Каца-Райса*, которая дает оценки длины линии уровня, числа особых точек, спектральные моменты на каждом сечении и среднее значение Эйлеровой характеристики поля. Интересно, что еще в 1957г, английский геофизик и океанограф *Майкл Лонге Хиггинс*, исследуя топологию особых точек в структуре ветровых волн впервые показал, что для гауссовских полей, эйлерова характеристика в ограниченной области равна нулю. Замечательные обобщения статистик *Райса* на случайные поля были найдены канадским математиком *Джоном Ворсли*, *Робертом Адлером* (Технион, Хайфа) и его учеником *Джонатаном Тейлором*. Оказалось, что выбросы случайного поля дают важную информацию о геометрии и топологии поля. Здесь снова важную роль играют функционалы Минковского, но уже в своей новой, криволинейной, ипостаси, как *кривизны Лифшица-Киллинга*. Замечательные результаты были получены в приложениях этих методов к космологии. К сожалению, за редким исключением, все эти вещи практически неизвестны в Солнечной физике. Цель доклада, привлечь внимание молодых коллег к областям математики, которые давно уже просятся к применению, да и просто необходимы, в физике Солнца.